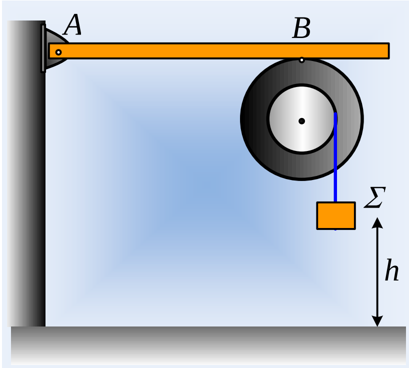
# Ισορροπία, πτώση και μήκος νήματος.




Δύο ομόκεντροι ομογενείς δίσκοι με ακτίνες $R_1$=0,2m και $R_2$=0,3m είναι κολλημένοι δημιουργώντας ένα στερεό s. Το στερεό s μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος έχει στερεωθεί σε κατακόρυφο τοίχο και διέρχεται από τα κέντρα των δίσκων, ως προς τον οποίο, το στερεό s παρουσιάζει ροπή αδράνειας I=0,24kg·m$^2$. Πάνω στον μεγάλο δίσκο στηρίζεται μια ομογενής οριζόντια λεπτή δοκός μήκους 4m, η οποία είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, μάζας Μ=3kg. Η δοκός στηρίζεται στο σημείο Β, όπου (ΑΒ)=3m. Γύρω από τον μικρό δίσκο ακτίνας $R_1$, τυλίγουμε ένα μακρύ αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα Σ, το οποίο απέχει h=0,5m από το έδαφος.

i) Αν η μάζα του σώματος Σ είναι m=1,5kg, αυτό ισορροπεί. Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και δίσκου, για την ισορροπία αυτή;

ii) Αν το σώμα Σ έχει μάζα m=2kg, τότε κινείται προς τα κάτω, φτάνοντας στο έδαφος με ταχύτητα υ=1m/s, όπου και προσκολλάται.

α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση με την οποία κινήθηκε το σώμα Σ.

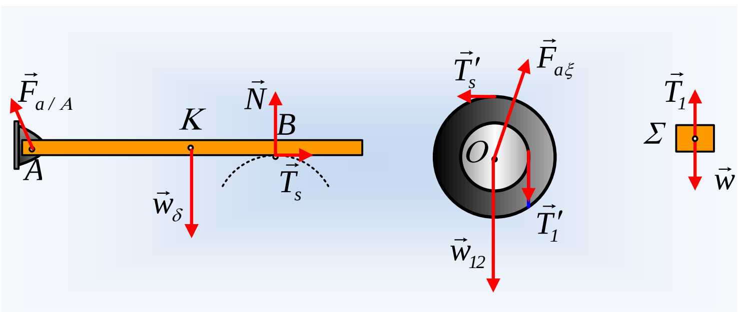
β) Να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται στη δοκό από τον δίσκο κατά την πτώση του σώματος Σ, καθώς και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκού και δίσκου.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού s, μέχρι τη στιγμή t΄=2s.

δ) Πόσο θα είναι τελικά το μήκος του νήματος που θα παραμείνει σε επαφή με το έδαφος;

Δίνεται ότι το νήμα δεν γλιστρά στο μικρό δίσκο ενώ και g=10m/s$^2$.

## *Απάντηση:*




i) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, στο στερεό s και στο σώμα Σ. Από την ισορροπία κάθε σώματος παίρνουμε:

Σώμα Σ: ΣF=0 → $T_1$=w=mg=15N, όπου $T_1$ η τάση του νήματος.

Στερεό s: Η τάση του νήματος $T_1$΄=15N, αφού το νήμα είναι αβαρές, η οποία τείνει να περιστρέψει δεξιόστροφα το στερεό. Αλλά τότε θα δεχτεί τριβή $T_s$΄ από τη δοκό με φορά προς τα αριστερά.

$$\Sigma\tau_O=0 \rightarrow T_s{}'\cdot R_2\text{-}T_1{}'\cdot R_1=0 \rightarrow T_s'=T_1'\frac{R_1}{R_2}=15\frac{0,2}{0,3}N=10N$$

Η δοκός δέχεται την αντίδραση της $T_s{}'$, την $T_s$=10N και ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow N\cdot(AB)-w_\delta\cdot(AK)=0 \rightarrow N=Mg\frac{(AK)}{(AB)}=30\frac{2}{3}N=20N$$

Αλλά για να μην υπάρχει ολίσθηση πρέπει:

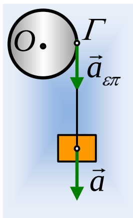
$$T_s \le T_{o\rho} \rightarrow T_s \le \mu_s N \rightarrow \mu_s \ge \frac{T_s}{N} \rightarrow \mu_s \ge 0,5$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής για να μην περιστραφεί το στερεό s και έχουμε ολίσθηση είναι $\mu_{s/min}$=0,5.

ii) Αν η μάζα του σώματος Σ είναι 2kg, το στερεό s στρέφεται και το σώμα Σ πέφτει. Εφαρμόζοντας τον 2[o] νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά παίρνουμε:

Σώμα Σ: $\Sigma F=m\cdot\alpha \rightarrow mg\text{-}T_1=m\cdot\alpha$ (1)

Στερεό s: $\Sigma\tau_o=I_s\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1{}'R_1\text{-}T_{o\lambda}\cdot R_2=I_s\cdot a_{\gamma\omega\nu}$ (2)




Σύνδεσμος: Κάθε σημείο του νήματος κινείται με την ίδια επιτάχυνση, συνεπώς η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι ίση με την επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Γ, όπου το νήμα συναντά τον δίσκο $R_1$. Δηλαδή:

$$\alpha=\alpha_{\varepsilon\pi/\Gamma}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R_1 \quad (3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3), παίρνουμε για την επιτάχυνση του σώματος Σ:

$$a=\frac{mgR_1^2-T_{o\lambda}R_1R_2}{mR_1^2+I_s} \quad (4)$$

α) Η τριβή ολίσθησης όμως που αναπτύσσεται μεταξύ δοκού και στερεού s, είναι σταθερή, οπότε με βάση την σχέση (4) το σώμα Σ κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία ισχύουν:

$$\upsilon=\alpha\cdot t \text{ και } \Delta y=½\,\alpha t^2.$$

και με απαλοιφή του χρόνου για Δy=h παίρνουμε:

$$h=\frac{\upsilon^2}{2a} \rightarrow a=\frac{\upsilon^2}{2h}=\frac{1^2}{2\cdot 0,5}=1m/s^2.$$

β) Λύνουμε την (4) ως προς $T_{o\lambda}$, παίρνουμε:

$$T_{o\lambda}=\frac{mgR_1^2-(mR_1^2+I_s)a}{R_1R_2}=\frac{2\cdot 10\cdot 0,2^2-(2\cdot 0,2^2+0,24)\cdot 1}{0,2\cdot 0,3}N=8N$$

Η δοκός βέβαια ισορροπεί, οπότε ξανά N=20N, συνεπώς για την παραπάνω τριβή έχουμε:

$$T_{ολ}=\mu \cdot N \rightarrow \ \mu = \frac{T_{ολ}}{N} = \frac{8N}{20N} = 0{,}4$$

γ) Μόλις το σώμα Σ ακινητοποιηθεί στο έδαφος, το νήμα χαλαρώνει, παύοντας να ασκεί δύναμη στο στερεό s, το οποίο αρχίζει να επιβραδύνεται εξαιτίας της ροπής της τριβής. Δουλεύοντας με αλγεβρικές τιμές των μεγεθών έχουμε:

$$\Sigma\tau_o = I_s \cdot \alpha_{γων1} \rightarrow -T_{ολ} \cdot R_2 = I_s \cdot \alpha_{γων1} \rightarrow$$

$$a_{γων1} = -\frac{T_{ολ}R_2}{I_s} = -\frac{8 \cdot 0{,}3}{0{,}24} rad/s^2 = -10 rad/s^2.$$

Αλλά αν Δt το χρονικό διάστημα μέχρι να σταματήσει την περιστροφή, έχουμε:

$$a_{γων1} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_1}{\Delta t} \rightarrow \omega = \omega_1 + a_{γων1}\Delta t$$

ενώ $\omega_1$ η γωνιακή ταχύτητα του s, τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο έδαφος, όπου η ταχύτητα του σώματος θα είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Γ (στο παραπάνω σχήμα) με αποτέλεσμα $\upsilon=\omega_1 \cdot R_1$ οπότε $\omega_1 = \frac{\upsilon}{R_1} = \frac{1}{0{,}2} rad/s = 5 rad/s$

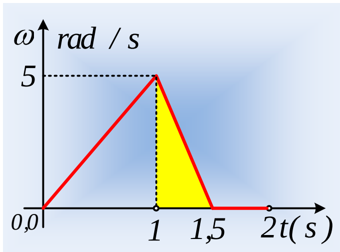
Τη στιγμή εξάλλου που σταματά η περιστροφή του στερεού s, ω=0, οπότε

$$\Delta t = -\frac{\omega_1}{a_{γων1}} = -\frac{5}{-10} s = 0{,}5s$$

Όμως η πτώση του σώματος Σ διαρκεί χρόνο $t_1$, όπου:

$$\upsilon = \alpha \cdot t_1 \rightarrow \ t_1 = \frac{\upsilon}{a} = \frac{1}{1} s = 1s$$

Με βάση αυτά, η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού s, μεταβάλλεται όπως στο διπλανό σχήμα.




δ) Κατά η διάρκεια της επιβράδυνσης το στερεό s, στρέφεται κατά γωνία Δθ, ίση αριθμητικά με το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου, στο παραπάνω διάγραμμα ω-t. Έτσι:

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{2}\beta\upsilon = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot 5 rad = 1{,}25 rad$$

Οπότε ελευθερώθηκε νήμα μήκους:

$$\Delta s = \Delta\vartheta \cdot R_1 = 1{,}25 \cdot 0{,}2m = 0{,}25m = 25cm$$

Ίσου μήκος νήματος συνεπώς θα βρίσκεται στο έδαφος (προφανώς άλλα 50cm νήματος θα κρέμονται από το στερεό s)

**Υλικό Φυσικής-Χημείας**
*Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…*

Επιμέλεια:

***Διονύσης Μάργαρης***