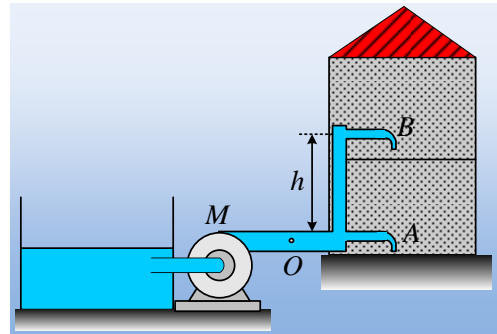


Ας μειώσουμε το συντελεστή δόμησης!!!

Ας συνεχίσουμε στη γραμμή της ανάρτησης; «Τρεις ανοικτές βρύσες και η αντλία.» αλλά μειώνοντας ...τους ορόφους, για λιγότερες πράξεις.

Μια διώροφη!!! λοιπόν κατοικία τροφοδοτείται με νερό από μια δεξαμενή, στην επιφάνεια του εδάφους, με την βοήθεια μιας αντλίας (M), όπως στο σχήμα. Ο κεντρικός σωλήνας τροφοδοσίας έχει διατομή $A_1=14,5\text{cm}^2$, ενώ με πλήρως ανοικτές τις βρύσες, το νερό εξέρχεται σχηματίζοντας φλέβες με διατομές $A=0,3\text{cm}^2$. Η βρύση στο ισόγειο, βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την αντλία, ενώ η βρύση στον πρώτο όροφο βρίσκεται ψηλότερα κατά $h=4\text{m}$. Η αντλία λειτουργεί αυτόματα, εξασφαλίζοντας στην έξοδό της, σταθερή πίεση p_0 . Ανοίγουμε ταυτόχρονα και πλήρως τις δυο βρύσες, οπότε η παροχή της βρύσης του ισόγειου είναι $0,45\text{L/s}$. Θεωρώντας μηδενικό το συντελεστή ιξώδους, ενώ δεν υπάρχουν τριβές του νερού με τα τοιχώματα και τις ροές μόνιμες και στρωτές:



i) Να βρεθεί η παροχή της βρύσης του πρώτου ορόφου.

ii) Ποια η ισχύς τη αντλίας;

iii) Βέβαια στην πραγματικότητα, η παραπάνω ροή δεν είναι στρωτή αλλά τυρβώδης, αφού το νερό δεν έχει μηδενικό συντελεστή ιξώδους. Έτσι λειτουργώντας η αντλία με τον ίδιο τρόπο εξασφαλίζει στο σημείο O την ίδια σταθερή πίεση p_0 , ενώ οι παροχές είναι $\Pi_A=0,42\text{L/s}$, $\Pi_B=0,30\text{L/s}$. Να βρεθεί η ισχύς που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της εσωτερικής τριβής που εμφανίζεται.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000\text{kg/m}^3$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

i) Έστω v_1 και v_2 οι ταχύτητες εκροής στις δυο βρύσες και v η ταχύτητα του νερού στην έξοδο της αντλίας, σημείο O. Για την βρύση A:

$$\Pi_1=A \cdot v_1 \rightarrow v_1 = \frac{0,45 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}}{0,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 15 \text{ m/s}$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου O και του σημείου εξόδου της βρύσης A στο ισόγειο:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (1)$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου O και του σημείου εξόδου της βρύσης B:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h \quad (2)$$

Από (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη ότι $p_B=p_A=p_{\text{ατμ}}$, έχουμε:

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh = p_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh} = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4} \text{ m/s} \approx 12 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε η παροχή της βρύσης του α' ορόφου είναι:

$$\Pi_2 = A \cdot v_2 = 0,3 \cdot 10^{-4} \cdot 12 \text{ m}^3/\text{s} = 0,36 \text{ L/s.}$$

ii) Υπεύθυνη για την αύξηση της μηχανικής ενέργειας του νερού, κατά την μεταφορά του από την δεξαμενή, στις βρύσες, είναι η αντλία. Αλλά ο ρυθμός αύξησης της μηχανικής ενέργειας του νερού κατά την παραπάνω μεταφορά είναι:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot gh}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V \cdot gh}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2} \rho \Delta V \cdot v^2}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \right) \rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \Pi_1 \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \right) = 0,45 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{2} 1.000 \cdot 15^2 \right) \text{ J/s} \approx 50,6 \text{ J/s}$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2 \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \right) = 0,36 \cdot 10^{-3} \left(10.000 \cdot 4 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot 12^2 \right) \text{ J/s} \approx 40,4 \text{ J/s}$$

$$\frac{\Delta E_{ολ.}}{\Delta t} = (50,6 + 40,4) \text{ J/s} \approx 91 \text{ J/s} = P_{αντλίας}$$

Εναλλακτικά:

Η ισχύς της αντλίας, είναι ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο πάνω στη στήλη του νερού. Αλλά τότε:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{(p_o - p_{αρ}) \Delta V}{\Delta t} = (p_o - p_{αρ}) \cdot \Pi$$

Όπου η συνολική παροχή είναι $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = (0,45 + 0,36) \text{ L/s} = 0,81 \text{ L/s}$, ενώ από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής στο Ο και των διατομών των φλεβών στις βρύσες παίρνουμε:

$$A_1 v_o = A v_1 + A v_2 \rightarrow$$

$$v_o = \frac{A}{A_1} (v_1 + v_2) = \frac{0,3 \text{ cm}^2}{14,5 \text{ cm}^2} (15 + 12) \text{ m/s} \approx 0,56 \text{ m/s}$$

Εξάλλου από την σχέση (1) παίρνουμε $p_o - p_{αρ} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_o^2$ (4)

$$P_{αντ} = (p_o - p_{αρ}) \cdot \Pi = \left(\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_o^2 \right) \cdot \Pi \rightarrow$$

$$P_{avt} = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_o^2) \cdot \Pi = \frac{1}{2} \cdot 1000 (15^2 - 0,56^2) \cdot 0,81 \cdot 10^{-3} W \approx 91W$$

iii) Το νερό που εξέρχεται στη μονάδα του χρόνου, από την Α βρύση, αφού η ροή είναι τυρβώδης, δεν είναι σταθερή. Μπορούμε όμως να βρούμε την μέση ταχύτητα εκροής:

$$v_1' = \frac{\Pi_1'}{A} = \frac{0,42 \cdot 10^{-3} m^3 / s}{0,3 \cdot 10^{-4} m^2} = 14m / s$$

Αποτέλεσμα της μεταφοράς είναι να αυξάνεται η μηχανική ενέργεια του νερού και ο ρυθμός αύξησης θα είναι:

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi_1 \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1'^2 \right) = 0,42 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{2} 1.000 \cdot 14^2 \right) J/s \approx 41,2 J / s$$

Με την ίδια λογική, από την βρύση Β:

$$v_2' = \frac{\Pi_2'}{A} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3} m^3 / s}{0,3 \cdot 10^{-4} m^2} = 10m / s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2 \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2'^2 \right) = 0,3 \cdot 10^{-3} \left(1.000 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot 10^2 \right) J/s = 27 J / s$$

Συνεπώς η συνολική αύξηση της μηχανικής ενέργειας της ποσότητας του νερού που εξέρχεται από τις τρεις βρύσες, στη μονάδα του χρόνου, είναι ίση με $(41,2 + 27) J/s = 68,2 J/s$ ενώ η αντίστοιχη ενέργεια που πήρε από την αντλία είναι:

$$P'_{avt} = (p_o - p_{at}) \cdot \Pi' \rightarrow$$

Όμως από την σχέση (4), με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$p_o - p_{at} = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_o^2) = \frac{1}{2} \cdot 1000 (15^2 - 0,56^2) N / m^2 = 112.343 N / m^2.$$

Ας προσεχθεί ότι η πίεση που δημιουργεί η αντλία είναι ίδια, είτε το νερό θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, είτε όχι, οπότε και η διαφορά $p_o - p_{at}$ είναι η ίδια.

Εξάλλου η συνολική παροχή είναι ίση με $\Pi' = \Pi_1' + \Pi_2' = (0,42 + 0,30) L/s = 0,72 L/s$, οπότε:

$$P'_{avt} = (p_o - p_{at}) \cdot \Pi' = 112.343 \cdot 0,72 \cdot 10^{-3} W = 80,9W$$

Αλλά τότε με βάση της διατήρηση της ενέργειας, η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, η οποία μετατρέπεται σε θερμική (αυξάνοντας την εσωτερική ενέργεια του νερού και των σωλήνων), εξαιτίας των τριβών είναι:

$$P_Q = (80,9J - 68,2) J / s = 12,7 J / s$$