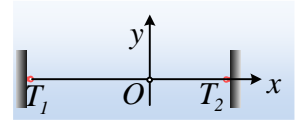


### Ένα στάσιμο κύμα ανάμεσα σε δυο σταθερά σημεία.

Μεταξύ δύο σταθερών σημείων  $T_1$  και  $T_2$  βρίσκεται ένα γραμμικό ελαστικό μέσο, μήκους  $l=3m$ , στο οποίο έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Ένα σημείο  $O$  του ελαστικού μέσου απέχει κατά  $1,3m$  από το δεξιό άκρο  $T_2$  και το λαμβάνουμε ως αρχή ενός συστήματος αξόνων  $(x,y)$ . Με βάση αυτό το σύστημα αξόνων, το στάσιμο κύμα μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:



$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t + \vartheta_0\right) \quad (1)$$

όπου τη στιγμή  $t=0$ , το σημείο  $O$  βρίσκεται σε απομάκρυνση  $y=-0,1m$  με μηδενική ταχύτητα. Εξάλλου σε χρονικό διάστημα  $\Delta t=0,4s$  το  $O$  εκτελεί δυο πλήρεις ταλαντώσεις, ενώ η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά μια κοιλία του μέσου έχει μέτρο  $v_{\max}=2\pi$  m/s.

- i) Να βρεθεί η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας του μέσου.
- ii) Ποιες οι δυνατές τιμές της γωνίας  $\varphi_0$  που περιλαμβάνεται στην παραπάνω εξίσωση;
- iii) Αν  $\varphi_0=\pi/3$  rad να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος κατά μήκος του μέσου αυτού, αν μεταξύ του σημείου  $O$  και του σημείου πρόσδεσης  $T_2$  υπάρχουν δύο σημεία του μέσου που παραμένουν ακίνητα.
- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.
- v) Να παρασταθούν στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=0$  και  $t_2=0,125$  s, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

#### Απάντηση:

- i) Η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{2}{0,4} \text{ Hz} = 5 \text{ Hz}$$

Ενώ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης μιας κοιλίας είναι  $v_{\max}=\omega \cdot A'$ , όπου  $A'=2A$ , οπότε:

$$A' = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max}}{2\pi f} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 5} m = 0,2m$$

- ii) Τη στιγμή  $t=0$ , το σημείο  $O$ , βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης, αφού έχει μηδενική ταχύτητα, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης του είναι  $A_0=0,1m$ . Όμως το πλάτος αυτό είναι ίσο με:

$$A_0 = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \right| \rightarrow 0,1 = \left| 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot 0}{\lambda} + \varphi_0\right) \right| \rightarrow$$

$$\left| \sigma\upsilon\nu(\varphi_0) \right| = \frac{1}{2} \rightarrow \sigma\upsilon\nu(\varphi_0) = \pm \frac{1}{2}$$

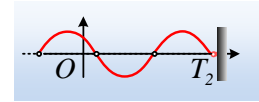
Αλλά τότε οι δυνατές τιμές της γωνίας  $\varphi_0$  είναι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}, \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_0 = \frac{4\pi}{3} \text{ και } \varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$$

iii) Παίρνοντας την εξίσωση του πλάτους και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\varphi_0 = \pi/3$  έχουμε για τους δεσμούς:

$$A = \left| 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \right| \rightarrow 0,2 \cdot \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} + \frac{\pi}{3}\right) \right| = 0$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{6}\right)\lambda$$



Για  $k=0$ , έχουμε τον πρώτο δεσμό δεξιά του O, για  $k=1$ , τον δεύτερο και για  $k=2$ , τον τρίτο. Με βάση το διπλανό σχήμα το άκρο  $T_2$  αντιστοιχεί στον τρίτο δεσμό δεξιά του O, οπότε:

$$x = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{6}\right)\lambda = \frac{13}{12}\lambda \rightarrow \lambda = \frac{12}{13}x = \frac{12}{13}1,3\text{m} = 1,2\text{m}$$

Αλλά τότε  $v = \lambda \cdot f = 1,2 \cdot 5\text{m/s} = 6\text{m/s}$ .

iv) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος τα δεδομένα για το σημείο O,  $x=0$  και  $t=0$ , παίρνουμε:

$$-0,1 = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot 0}{\lambda} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu(2\pi f \cdot 0 + \vartheta_0) \rightarrow \eta\mu\vartheta_0 = -1 \rightarrow \vartheta_0 = \frac{3\pi}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{1,2} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

v) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση του κύματος  $t_1=0$ , παίρνουμε τις απομακρύνσεις όλων των σημείων του μέσου την παραπάνω χρονική στιγμή:

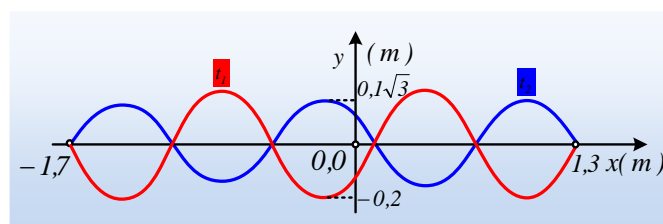
$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi \cdot 0 + \frac{3\pi}{2}\right) = -0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ με } -1,7\text{m} \leq x \leq 1,3\text{m}$$

Με γραφική παράσταση, το **κόκκινο** διάγραμμα στο παρακάτω σχήμα.

Αντίστοιχα τη στιγμή  $t_2=0,125\text{ s}$  παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(10\pi \cdot 0,125 + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,1\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ με } -1,7\text{m} \leq x \leq 1,3\text{m}$$



Με γραφική παράσταση το **μπλε** διάγραμμα στο παραπάνω σχήμα.

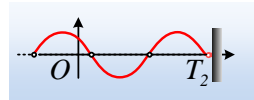
### Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να ακολουθήσουμε την εξής πορεία για τον υπολογισμό του μήκους κύματος. Παίρνοντας την εξίσωση του πλάτους και αντικαθιστώντας  $x=1,3\text{m}$ , παίρνουμε το πλάτος του σημείου πρόσδεσης  $T_2$ , το οποίο παραμένει ακίνητο (δεσμός του στάσιμου κύματος).

$$A_{T_2} = \left| 2A \cdot \sigma \nu \nu \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right) \right| \rightarrow 0 = \left| 0,2 \cdot \sigma \nu \nu \left( \frac{2\pi \cdot 1,3}{\lambda} + \frac{\pi}{3} \right) \right| \rightarrow$$

$$\frac{2,6\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2,6}{\lambda} = k + \frac{1}{6} \rightarrow \lambda = \frac{15,6}{6k+1} \quad \text{με } k \in Z \quad (2)$$

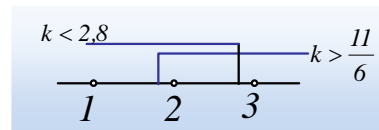
Όμως μεταξύ του  $O$  και του άκρου  $T_2$  υπάρχουν δύο δεσμοί, όπως στο διπλανό σχήμα. Η απόσταση όμως δύο διαδοχικών δεσμών είναι  $\lambda/2$ , οπότε για την απόσταση  $OT_2=x$ , θα ισχύει:



$$2 \frac{\lambda}{2} < x < 3 \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda < 1,3\text{m} \quad \text{και} \quad \lambda > 0,87$$

οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\begin{cases} \frac{15,6}{6k+1} < 1,3 \rightarrow 6k+1 > 12 \rightarrow k > \frac{11}{6} \quad \text{και} \\ \frac{15,6}{6k+1} > 0,87 \rightarrow 6k+1 < 17,9 \rightarrow k < 2,8 \end{cases}$$



Οι παραπάνω ανισότητες δίνουν κοινή ακέραια λύση  $k=2$ , οπότε από την (2):

$$\lambda = \frac{15,6}{6k+1} = \frac{15,6}{6 \cdot 2 + 1} = 1,2\text{m}$$

Θα μπορούσαμε βέβαια, να αποφύγουμε την εύρεση της τιμής του ακεραίου  $k$ , ερευνώντας απευθείας την κατάλληλη τιμή. Έτσι από τη σχέση  $\lambda = \frac{15,6}{6k+1}$  δίνοντας ακέραιες τιμές στο  $k$ , θα έχουμε:

Για  $k=0$ ,  $\lambda=15,6\text{m}$ , για  $k=1$   $\lambda=2,2$ , για  $k=2$   $\lambda=1,2\text{m}$  και για  $k=3$   $\lambda=0,82\text{m} \dots$

Οπότε με βάση τον περιορισμό ότι  $\lambda < 1,3\text{m}$  και  $\lambda > 0,87$ , επιλέγουμε την τιμή  $\lambda=1,2\text{m}$ .

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)